



بخش آموزش رسانه تفریحی سنتر

کلیک کنید  www.tafrihicenter.ir/edu

 نمونه سوال  گام به گام

 امتحان نهایی  جزوه

 دانلود آزمون های آزمایشی

متوسطه اول : هفتم ... هشتم ... نهم

متوسطه دوم : دهم ... یازدهم ... دوازدهم

www.tafrihicenter.ir



دبیرستان سلام تجریش
سلام تجریش

۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 5|A| & |A| \\ 5 & 4|A|^2 \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $(|A|^3 - 2)$ را بیابید.

پاسخ:

$$A = \begin{bmatrix} 5|A| & |A| \\ 5 & 4|A|^2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 20|A|^3 - 5|A| \rightarrow 20|A|^3 - 6|A| = 0 \rightarrow 2|A|(10|A|^2 - 3) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \rightarrow |A|^3 - 2 = -2 \\ |A| = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} \Rightarrow \begin{cases} \rightarrow |A|^3 - 2 = \frac{3}{10} \sqrt{\frac{3}{10}} - 2 \\ \rightarrow |A|^3 - 2 = -\frac{3}{10} \sqrt{\frac{3}{10}} - 2 \end{cases} \end{cases}$$

۲- فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ یک ماتریس 3×2 مانند C را طوری پیدا کنید که $A + B - C = O_{3 \times 2}$

پاسخ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

$$A + B - C = O_{3 \times 2} \Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow A + B = C$$

$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$$

۳- قضیه ۱ را ثابت کنید.

پاسخ:

اثبات ۱:

اگر $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ باشند داریم:

$$\begin{cases} A + B = [d_{ij}]_{m \times n}, d_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \\ B + A = [d'_{ij}]_{m \times n}, d'_{ij} = b_{ij} + a_{ij} \end{cases} \Rightarrow d_{ij} = d'_{ij} \Rightarrow [d_{ij}]_{m \times n} = [d'_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow A + B = B + A$$

اثبات ۲: اگر $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ باشند داریم:

$$A + B = [d_{ij}]_{m \times n} = D \quad d_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$B + C = [d'_{ij}]_{m \times n} = D' \quad d'_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$$

$$A + (B + C) = A + D' = [a_{ij}]_{m \times n} + [d'_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + d'_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}]$$

$$(A + B) + C = D + C = [d_{ij}]_{m \times n} + [c_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}]_{m \times n}$$

با مقایسه روابط فوق می یابیم:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

اثبات ۳: اگر $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $\bar{O} = [e_{ij}]_{m \times n}$ باشد می دانیم $e_{ij} = 0$ است.

$$A + \bar{O} = [a_{ij}]_{m \times n} + [e_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + e_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n} = A$$

اثبات ۴: اگر $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ باشد می دانیم $-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$ است.

$$A + (-A) = [a_{ij}]_{m \times n} + [-a_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + (-a_{ij})]_{m \times n} = [0]_{m \times n} = \bar{O}$$

اثبات ۵:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow rA = [ra_{ij}]_{m \times n}$$

$$B = [b_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow rB = [rb_{ij}]_{m \times n}$$

$$rA + rB = [ra_{ij} + rb_{ij}]_{m \times n} = [r(a_{ij} + b_{ij})]_{m \times n}$$

از طرفی

$$A + B = [a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

$$\Rightarrow r(A + B) = r[a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} = [r(a_{ij} + b_{ij})]_{m \times n}$$

با مقایسه روابط فوق می توان فهمید $r(A + B) = rA + rB$

اثبات ۶:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow (r + s)A = (r + s)[a_{ij}]_{m \times n}$$

$$= [(r + s)a_{ij}]_{m \times n} = [ra_{ij} + sa_{ij}]_{m \times n} = [ra_{ij}]_{m \times n} + [sa_{ij}]_{m \times n}$$

$$= r[a_{ij}]_{m \times n} + s[a_{ij}]_{m \times n} = rA + sA$$

اثبات ۷:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow (rs)A = (rs)[a_{ij}]_{m \times n}$$

$$= [(rs)a_{ij}]_{m \times n} = [r(sa_{ij})]_{m \times n} = r[sa_{ij}]_{m \times n} = r(sA)$$

اثبات ۸:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow 1 \times A = 1 \times [a_{ij}]_{m \times n}$$

$$= [1 \times a_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n} = A$$

۴- اگر $CA = C, AC = A, AB = BA = O$ نشان دهید $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$

پاسخ:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

$$AB = BA = O \Rightarrow$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

$$\Rightarrow AB = BA = \bar{O}$$

$$AC = A \Rightarrow AC = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow AC = A$$

$$CA = C \Rightarrow CA = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow CA = C$$

۵- فرض کنید d, c, b, a چهار واحد طول باشد. ماتریس زیر یک جدول تبدیل واحد است

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین، یک واحد از a ، شش واحد از c است، یک واحد از b هشت واحد از d است، و یک واحد از c نصف واحد از b است. این جدول را به عنوان یک

ماتریس در نظر بگیرید و شرح دهید که چرا $a_{ik}a_{kj} = a_{ij}$. آیا می توانید بدون محاسبه ی مستقیم A^2 را پیدا کنید؟

پاسخ:

می دانیم اگر هر واحد از a مساوی m واحد از b باشد پس $a = mb$ ضمناً اگر هر واحد از b مساوی n واحد از c باشد پس $b = nc$ حال از ترکیب روابط فوق می توان فهمید هر واحد از a مساوی mn واحد از c است

$$\begin{cases} a = mb \\ b = nc \end{cases} \Rightarrow a = (mn)c$$

حال در ماتریس داده شده به طور مثال a_{12} یعنی هر واحد از a مساوی چند واحد از b است. و a_{24} یعنی هر واحد از b چند واحد از d است بنابراین $a_{12} \times a_{24}$ یعنی هر واحد از a چند واحد از d است که این همان مقدار a_{14} می باشد.

پس در حالت کلی می توان گفت $a_{ik} \times a_{kj} = a_{ij}$ حال با توجه به رابطه فوق اگر $[m_{ij}]_{4 \times 4} = A^2$ باشد

$$m_{ij} = \sum_{k=1}^4 a_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^4 a_{ij} = 4a_{ij}$$

بنابراین کافی است تک تک درایه های A را در ۴ ضرب کنیم تا درایه های A^2 ایجاد شوند.

۶- کارخانه ای سه محصول c, b, a را به دو بازار n, m می فروشد. تعداد واحدهای فروخته شده هر محصول در هر بازار در یک سال معین با ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 5000 & 2000 & 1500 \\ 2000 & 2000 & 1000 \end{bmatrix}$$

نمایش داده شده است. ماتریس های $C = \begin{bmatrix} 1,8 \\ 3,5 \\ 2,5 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ به ترتیب، قیمت فروش و قیمت تمام شده هر واحد از c, b, a را نشان می دهند. درآیه های هر

یک از ماتریس های $AB - AC, AC, AB$ را تعبیر کنید.

پاسخ:

$$AB = \begin{bmatrix} 5000 & 2000 & 1500 \\ 2000 & 2000 & 1000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22500 \\ 15000 \end{bmatrix}$$

عدد ۲۲۵۰۰ میزان فروش کل محصولات در بازار m را نشان می دهد و عدد ۱۵۰۰۰ میزان فروش کل محصولات در بازار n را نشان می دهد.

$$AC = \begin{bmatrix} 5000 & 2000 & 1500 \\ 2000 & 2000 & 1000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1,8 \\ 3,5 \\ 2,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19750 \\ 13100 \end{bmatrix}$$

عدد ۱۹۷۵۰ میزان قیمت تمام شده محصولات در بازار m و عدد ۱۳۱۰۰ میزان قیمت تمام شده محصولات در بازار n می باشد.

$$AB - AC = \begin{bmatrix} 22500 \\ 19000 \end{bmatrix}$$

می دانیم سود یعنی از قیمت فروش تمام شده را کم می کنیم پس ۲۲۵۰۰ میزان سود فروش محصولات در بازار m و عدد ۱۹۰۰۰ میزان سود فروش محصولات در بازار n را نشان می دهد.

$$A^2 - 4A - 5I_3 = O \quad \text{اگر } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A^2 - 4A - 5I_3 = 0$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$${}^rA = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} \quad {}^dI_r = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^r - {}^rA - {}^dI_r = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ مطلوب است محاسبه ی A^{10} .

پاسخ:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^r = I \Rightarrow (A^r)^5 = I^5 \Rightarrow A^{10} = I$$

۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، به کمک محاسبه ی توان های مختلف A ، نشان دهید عدد طبیعی n موجود است که $A^n = O$.

پاسخ:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^r = 0 \Rightarrow n = 3$$

در اینجاست ماتریس A را پوچ توان از مرتبه ۳ می گوئیم.

۱۰- به کمک تمرین قبل $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}^{600}$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$A = r \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{6}) & -\sin(\frac{\pi}{6}) \\ \sin(\frac{\pi}{6}) & \cos(\frac{\pi}{6}) \end{bmatrix} \Rightarrow A = r R_{\frac{\pi}{6}}$$

$$R_{\theta}^n = R_{n\theta} \Rightarrow A^{600} = r^{600} \times R_{600 \times \frac{\pi}{6}} = r^{600} \times \underbrace{R_{100 \times \pi}}_{R_{r\pi}} = r^{600} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = r^{600} I = \begin{bmatrix} r^{600} & 0 \\ 0 & r^{600} \end{bmatrix}$$

۱۱- فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ مقدار $|A|$ را با بسط دادن نسبت به هر یک از سطرها و ستون ها پیدا کنید. همچنین $|A|$ را به کمک روش ساروس محاسبه کنید.

پاسخ:

سطر اول:

$$1 \times (2 - 15) - 5(-4 - 12) + 7(10 + 4) = -13 + 80 + 98 = 165$$

سطر دوم:

$$-2(-10 - 35) + (-1)(-2 - 28) - 3(5 - 20) = 90 + 30 + 45 = 165$$

سطر سوم:

$$+4(15 + 7) - 5(3 - 14) + (-2)(-1 - 10) = 165$$

ستون اول:

$$+1(2 - 15) - 2(-10 - 35) + 4(15 + 7) = 165$$

ستون دوم:

$$-5(-4 - 12) + (-1)(-2 - 28) - 5(3 - 14) = 165$$

ستون سوم:

$$+7(10 + 4) - 3(5 - 20) - 2(-1 - 10) = 165$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = (2 + 60 + 70) - (-28 - 20 + 15) = 132 + 33 = 165$$

۱۲ - قضیه ی ۲ را ثابت کنید.

پاسخ:

باید $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ قرار دهیم $|A|, |B|$ را با بسط بیابیم و در یکدیگر ضرب کنیم سپس ماتریس AB را تشکیل دهیم و دترمینان آن را نیز با بسط بیابیم پس از مقایسه آنها خواهیم داشت $|AB| = |A| \times |B|$

۱۳ - فرض کنید بتوان یک ماتریس 3×3 مانند A را به صورت حاصلضرب یک ماتریس 3×2 در یک ماتریس 2×3 نوشت. ثابت کنید $|A| = 0$.

پاسخ:

فرض کنیم $B = \begin{bmatrix} x & y \\ p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ در این صورت داریم:

$$A = B \times C \Rightarrow |A| = |BC| = \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ p & q & 0 \\ r & s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ p & q & 0 \\ r & s & 0 \end{bmatrix} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{vmatrix} = 0 \times 0 = 0$$

۱۴ - فرض کنید μ, λ دو عدد حقیقی باشند. به کمک ویژگی های دترمینان ها، مقدار دترمینان ماتریس $A = [\lambda i + \mu j]_{3 \times 3}$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda + \mu & \lambda + 2\mu & \lambda + 3\mu \\ 2\lambda + \mu & 2\lambda + 2\mu & 2\lambda + 3\mu \\ 3\lambda + \mu & 3\lambda + 2\mu & 3\lambda + 3\mu \end{vmatrix}$$

سطر اول را به سطر سوم
→
افزافه می کنیم

$$\begin{vmatrix} \lambda + \mu & \lambda + 2\mu & \lambda + 3\mu \\ 2\lambda + \mu & 2\lambda + 2\mu & 2\lambda + 3\mu \\ 4\lambda + 2\mu & 4\lambda + 4\mu & 4\lambda + 6\mu \end{vmatrix} = 0$$

اگر در یک ماتریس، دو سطر مساوی داشته باشیم دترمینان آن ماتریس مساوی صفر است.

۱۵ - اگر $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ رؤس یک مثلث از صفحه ی

$\mathbb{R}^2$ باشند، ثابت کنید مساحت مثلث ABC برابر است با قدر مطلق مقدار زیر

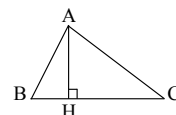
$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

پاسخ:

برای پیدا کردن مساحت مثلث ABC باید اندازه قاعده و ارتفاع مثلث را داشته باشیم:

اندازه ارتفاع AH یعنی فاصله A از خط BC

ابتدا معادله خط BC را می نویسیم.



$$\begin{cases} B(b_1, b_2) \\ C(c_1, c_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} \\ y - b_2 = \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} (x - b_1) \Rightarrow (y - b_2)(c_1 - b_1) = (c_2 - b_2)(x - b_1) \end{cases}$$

$$|AH| = \frac{|(a_2 - b_2)(c_1 - b_1) - (c_2 - b_2)(a_1 - b_1)|}{\sqrt{(c_1 - b_1)^2 + (c_2 - b_2)^2}} = \frac{|a_1(b_2 - c_2) - b_1(a_2 - c_2) + c_1(a_2 - b_2)|}{\sqrt{(c_1 - b_1)^2 + (c_2 - b_2)^2}}$$

از طرفی $|BC| = \sqrt{(c_1 - b_1)^2 + (c_2 - b_2)^2}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |AH| \times |BC| = \frac{1}{2} |a_1(b_r - c_r) - b_1(a_r - c_r) + c_1(a_r - b_r)|$$

از طرفی حاصل دترمینان داده شده به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_r & b_r & c_r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a_1(b_r - c_r) - b_1(a_r - c_r) + c_1(a_r - b_r)$$

بنابراین نصف این دترمینان با مساحت مثلث برابر است.

۱۶- نشان دهید $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$ معادله ی خطی است که از نقاط $(c, d), (a, b)$ در $\mathbb{R}^2$ می گذرد.

پاسخ:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow +x(b-d) - y(a-c) + 1(ad-bc) = 0$$

$$\Rightarrow AX + By + C = 0$$

پس معادله داده شده معادله یک خط راست است.

حال وضعیت دو نقطه را در معادله چک می کنیم

$$A(a, b) \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ برقرار است}$$

$$B(c, d) \Rightarrow \begin{vmatrix} c & d & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ برقرار است}$$

پس معادله داده شده معادله یک خط راست است که از دو نقطه $B(c, d), A(a, b)$ عبور می کند.

۱۷- اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ مفروض باشد، حاصل A^3 را به دست آورید.
چه نتیجه ای می گیرید؟

پاسخ:

$$A^r = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$A^r = A^r A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 3^3 & 0 \\ 0 & 0 & 4^3 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix} \text{ نتیجه می گیریم اگر } A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \text{ آنگاه داریم:}$$

۱۸- دترمینان ماتریس زیر را با استفاده از دستور ساروس محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = \underbrace{(4 - 9 - 8)}_{-13} - \underbrace{(3 - 12 - 8)}_{-17} = 4$$

۱۹- دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ را بر حسب سطر سوم بیابید. چه نتیجه ای می گیرید؟

پاسخ:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = d \underbrace{\begin{vmatrix} b & c \\ b & c \end{vmatrix}}_0 - e \underbrace{\begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix}}_0 + f \underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}}_0 = 0.$$

نتیجه: هرگاه دو سطر (یا ستون) در یک ماتریس مانند هم (یا مضربی از هم) باشند حاصل دترمینان صفر است.

۲۰- اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 4}$ به طوری که برای $i = j$ داشته باشیم $a_{ij} = 7$ و برای $i > j$ داشته باشیم $a_{ij} = i + j$ و برای $i < j$ داشته باشیم $a_{ij} = i^2$ در این صورت ماتریس A را مشخص کنید.

پاسخ:

$$a_{ij} = \begin{cases} 7 & i = j \\ i + j & i > j \\ i^2 & i < j \end{cases}$$

$$A = [a_{ij}]_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

۲۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A = B$ در این صورت حاصل $x + y + z$ را بیابید.

پاسخ:

$$A = B \rightarrow \begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x-y=3 \\ 2x+y=5 \\ z=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=-2 \end{cases}$$

$$\rightarrow x + y + z = 2 + 1 + (-2) = 1$$

۲۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری بیابید که حاصل ضرب $A \times B$ ماتریسی قطری باشد.

پاسخ:

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3a & -8+2a \\ b-3 & -2b-2 \end{bmatrix}$$

می‌دانیم در ماتریس قطری درایه‌های بیرون قطر اصلی همگی صفر هستند. بنابراین داریم:

$$-8 + 2a = 0 \rightarrow a = 4$$

$$b - 3 = 0 \rightarrow b = 3$$

۲۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ حاصل A^3 و A^7 را بیابید.

پاسخ:

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^2 = I \xrightarrow{\times A} A^3 = A$$

$$A^2 = I \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۳}} A^6 = I \xrightarrow{\times A} A^7 = A$$

۲۴- اگر A و B ماتریس‌های 3×3 و تعویض‌پذیر باشند ($A \times B = B \times A$) ثابت کنید.

الف) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

ب) $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$

پاسخ:

الف) $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$

$$\xrightarrow{AB=BA} A^2 + 2AB + B^2$$

ب) $(A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2 \xrightarrow{AB=BA} A^2 - B^2$

۲۵- با یک مثال نقص نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد. به عبارت دیگر نشان دهید در حالت کلی از تساوی $AB = AC$

 نمی‌توان نتیجه گرفت $B = C$.

پاسخ:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}_B = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}}_C$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

 همانطور که مشاهده می‌کنید $AB = AC$ اما $B \neq C$ می‌باشد.

 ۲۶- دو ماتریس 3×3 مانند A و B مثال برنید که $A \neq \bar{O}$ و $B \neq \bar{O}$ ولی $AB = \bar{O}$.

پاسخ:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c & f & g \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c & f & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

 ۲۷- وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

پاسخ:

 می‌دانیم اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در این صورت وارون $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ از رابطه روبه‌رو به دست می‌آید. بنابراین:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

 ۲۸- نشان دهید ماتریس $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ است.

پاسخ:

 کافیت نشان دهیم: $AB = BA = I$

$$AB = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

۲۹- قضیهٔ یکتایی وارون: وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود، منحصر به فرد است.

پاسخ:

 فرض می‌کنیم ماتریس‌های B و C هر دو وارون A باشند؛ ثابت می‌کنیم: $B = C$.

$$\text{فرض: } AB = BA = I$$

$$\text{فرض: } AC = CA = I$$

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$$

 ۳۰- دستگاه $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_B$$

$$X = A^{-1}B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6-4} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

 ۳۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ حاصل عبارت $2A^{-1} - 3B^{-1}$ را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow 2A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow 3B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{17} & \frac{9}{17} \\ -\frac{15}{17} & -\frac{6}{17} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow 2A^{-1} - 3B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} + \frac{3}{17} & -\frac{3}{7} - \frac{9}{17} \\ -\frac{2}{7} + \frac{15}{17} & \frac{4}{7} + \frac{6}{17} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{106}{119} & -\frac{114}{119} \\ \frac{71}{119} & \frac{110}{119} \end{bmatrix}$$

۳۲- دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با استفاده از A^{-1} بیابید.

پاسخ:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{26} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{26} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \rightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{26} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} + \frac{50}{26} \\ -\frac{2}{13} + \frac{30}{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{52}{26} \\ \frac{26}{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

۳۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ابتدا ماتریس A^{-1} را به دست آورده و $|A|$ را با $|A^{-1}|$ مقایسه کنید.

پاسخ:

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow |A^{-1}| = \left(\frac{1}{2} \times \frac{5}{4} \right) - \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \right) \rightarrow |A^{-1}| = \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$|A| = (5 \times 2) - (3 \times 2) = 10 - 6 = 4 \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

۳۴- روی وجود و عدم وجود و تعداد جواب‌های دستگاه زیر بحث کنید و در صورت وجود، جواب را با استفاده از A^{-1} بیابید.

$$\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

پاسخ:

$$\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \quad \frac{3}{2} \neq -\frac{5}{1}$$

پس دستگاه یک جواب منحصر به فرد دارد.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}}_B \rightarrow X = A^{-1}B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{13} + \frac{40}{13} \\ \frac{2}{13} + \frac{24}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{39}{13} \\ \frac{26}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x = 3 \\ y = 2 \end{matrix}$$

۳۵- به ازای چه مقادیری از k دستگاه $\begin{cases} kx + 3y = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ یک دسته جواب منحصر به فرد دارد؟

پاسخ:

شرط اینکه دستگاه یک جواب داشته باشد این است که ۲ خط متقاطع باشند.

$$\begin{cases} kx + 3y = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{k}{1} \neq \frac{3}{-2} \rightarrow k \neq -\frac{3}{2}$$